



**Саровский физико-технический институт
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ**

Элементы нечетких множеств

Алексеев В.В.

**Саров
2016**



Определение нечеткого множества

- Если задано некоторое множество X , то A является подмножеством X тогда и только тогда, когда $\forall x \in A \rightarrow x \in X$. Но любое подмножество множества можно описать с помощью его функции принадлежности

$$\mu_A(x) : A \rightarrow \{0; 1\}$$

значение которой для элемента $x \in X$ равно единице тогда, когда этот элемент принадлежит множеству A , и нулю – в противном случае.



Определение

- Нечетким множеством $\tilde{A}$ в X называется функция $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0; 1]$, которая каждому из элементов множества X ставит в соответствие степень его принадлежности нечеткому множеству $\tilde{A}$.
- Нечетким множеством $\tilde{A}$ в некотором (непустом) множестве X (обозначается как $\tilde{A} \subseteq X$) называется множество пар
$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}; x \in X\}$$
где $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$ функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$



МОЖНО ВЫДЕЛИТЬ три случая:

- $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ означает полную принадлежность элемента x к $\tilde{A}$, т.е. $x \in A$;
- $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ означает отсутствие принадлежности элемента x к $\tilde{A}$;
- $0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$ означает частичную принадлежность элемента к нечеткому множеству $\tilde{A}$

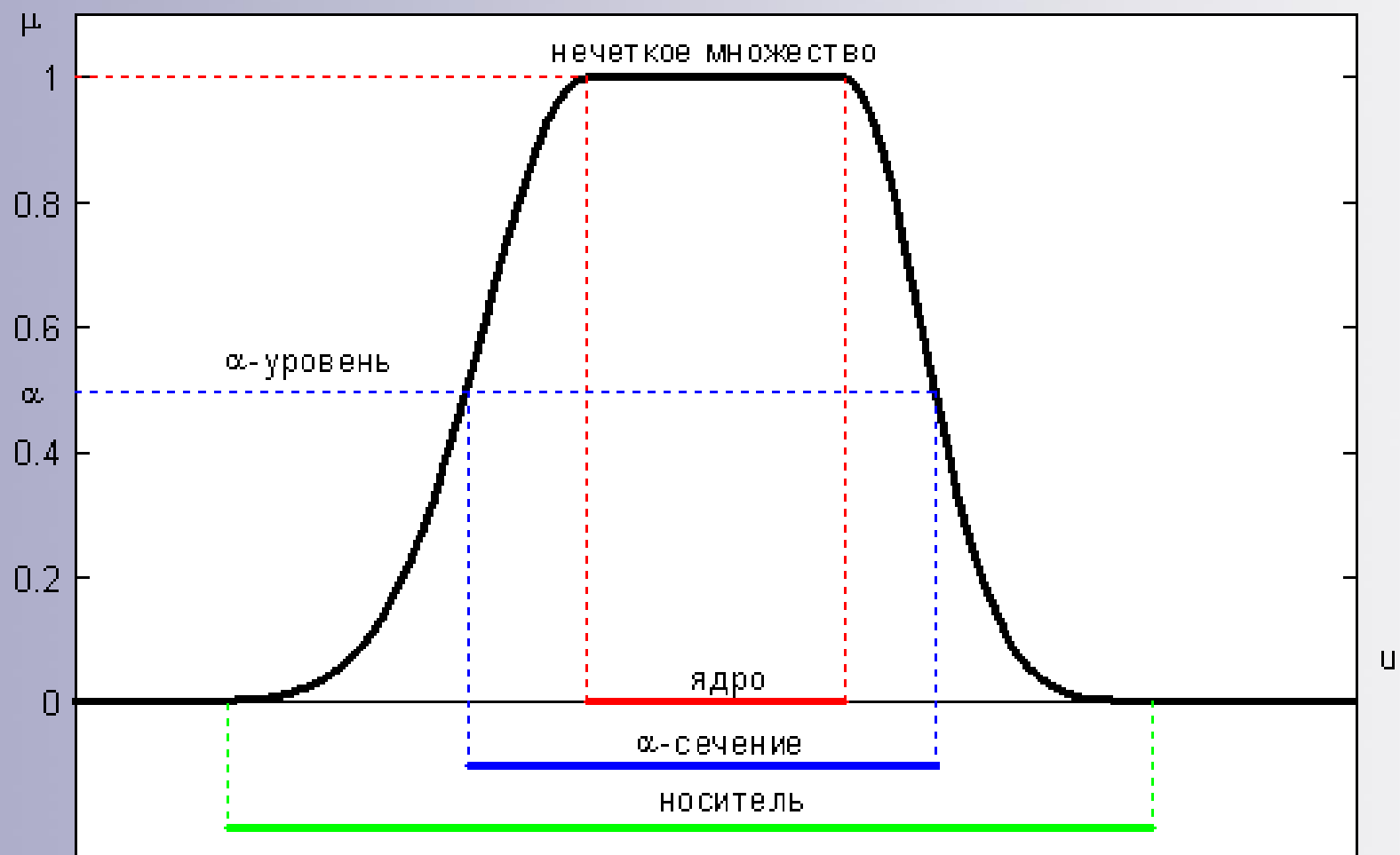


- Нечеткое множество называется **нормальным**, если $\sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ и **субнормальным** в противном случае.
- **Носителем** (суппортом) $\text{supp } \tilde{A}$ нечеткого множества называется обычное множество $\text{supp } \tilde{A} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}} > 0\}$.
- **Высотой** нечеткого множества называется величина $h(\tilde{A}) = \max_{x \in \tilde{A}} \mu_{\tilde{A}}(x)$. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называется **нормальным**, если $h(\tilde{A}) = 1$.



- **Определение.** Множество элементов пространства X , для которых $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, называется ядром нечеткого множества $\tilde{A}$ и обозначается $core(\tilde{A})$.
- **Определение.** α -сечением нечеткого множества $\tilde{A}$ называется четкое подмножество множества X , элементы которого имеют степени принадлежности больше и равные α :

$$A_{\alpha} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1].$$





Символьное обозначение нечетких множеств

- Если $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то нечеткое множество $A \subseteq X$ записывается в виде:

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$$

- $\tilde{A} = \{(x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)) \mid x \in A \subset X, \mu_{\tilde{A}} \in [0; 1]\}$



Пример 1.

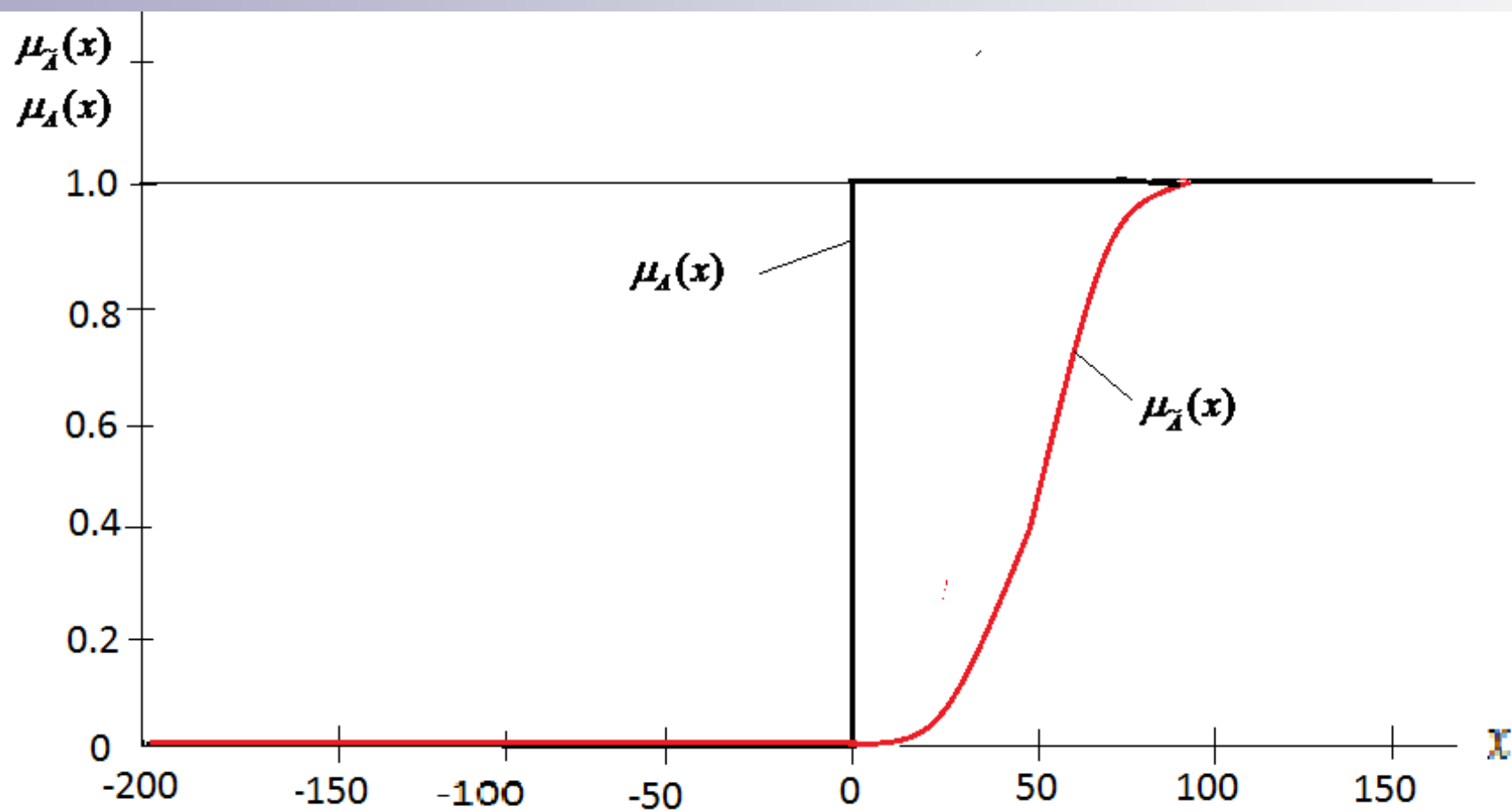
- Пусть множество X – это множество всех действительных чисел. Множество A чисел, больших нуля, будет его четким подмножеством с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



- Нечеткое множество чисел «много больших нуля» можно определить задав его функцию принадлежности, например, следующим образом:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 100; \\ 0, & x \leq 0; \\ 0.5 - 0.5 \cos(\pi x / 100), & 0 < x < 100 \end{cases}$$

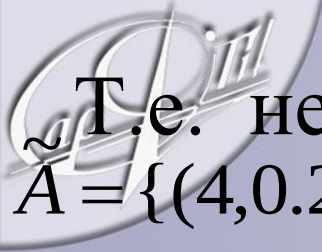




Пример 2.

- Допустим, что X - множество натуральных чисел. Определим понятие множества натуральных чисел, «близких числу 7». Это можно сделать, например, определением следующего нечеткого множества:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \{ (x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)) \mid x \in A \subset X, \mu_{\tilde{A}}(x) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{4} |x - 7| \text{ при } 4 \leq x \leq 10; \\ 0 \text{ в противном случае} \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

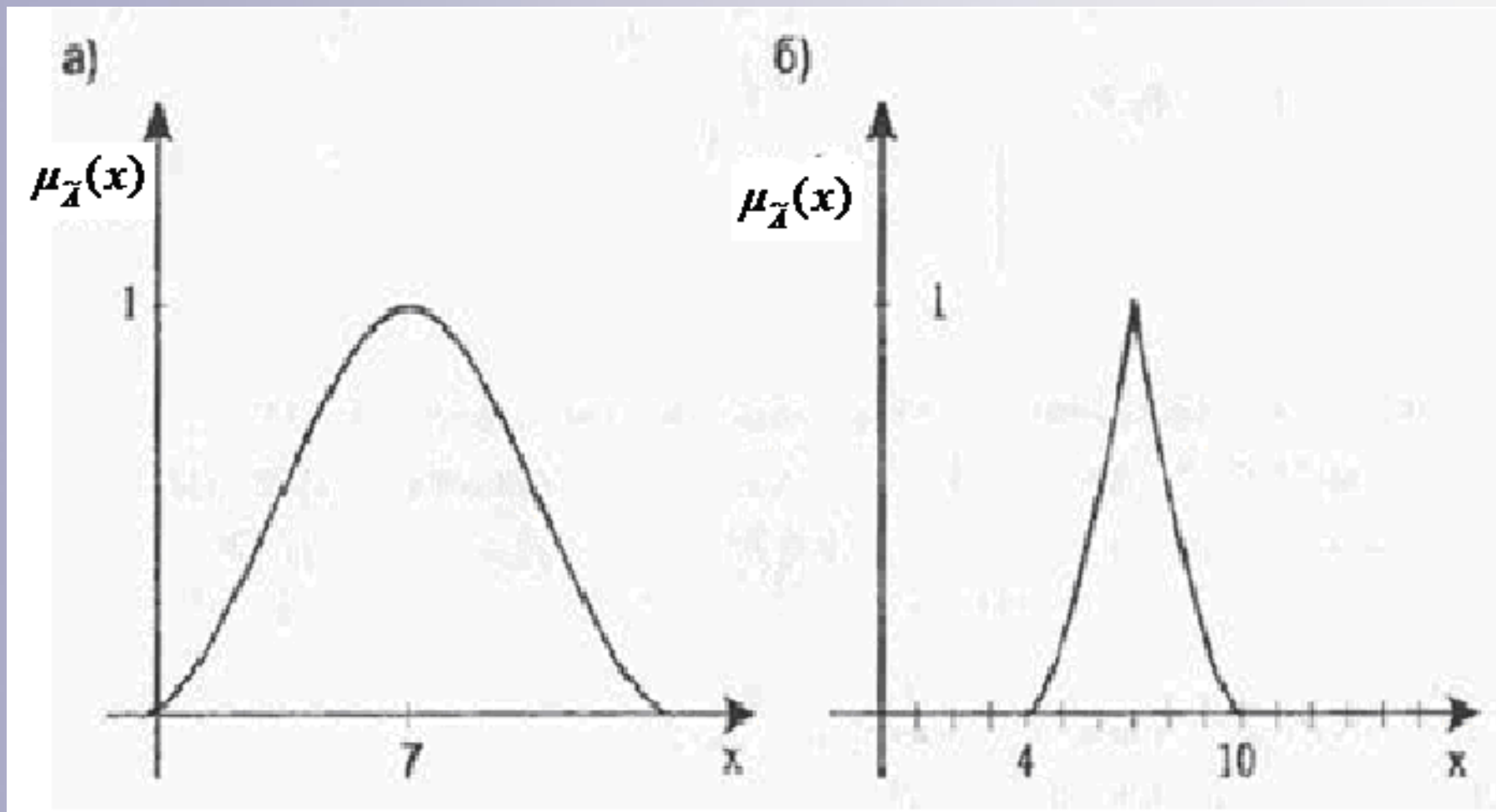


Т.е. нечеткое множество
 $\tilde{A} = \{(4, 0.25), (5, 0.5), (6, 0.75), (7, 1.0), (8, 0.75), (9, 0.5), (10, 0.25)\}$

Если $X=R$, где R - множество действительных чисел, то множество действительных чисел, «близких числу 7», можно определить функцией принадлежности, например, вида

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + (x - 7)^2} \quad \text{или вида}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{|x - 7|}{3}} & \text{при } 4 \leq x \leq 10; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

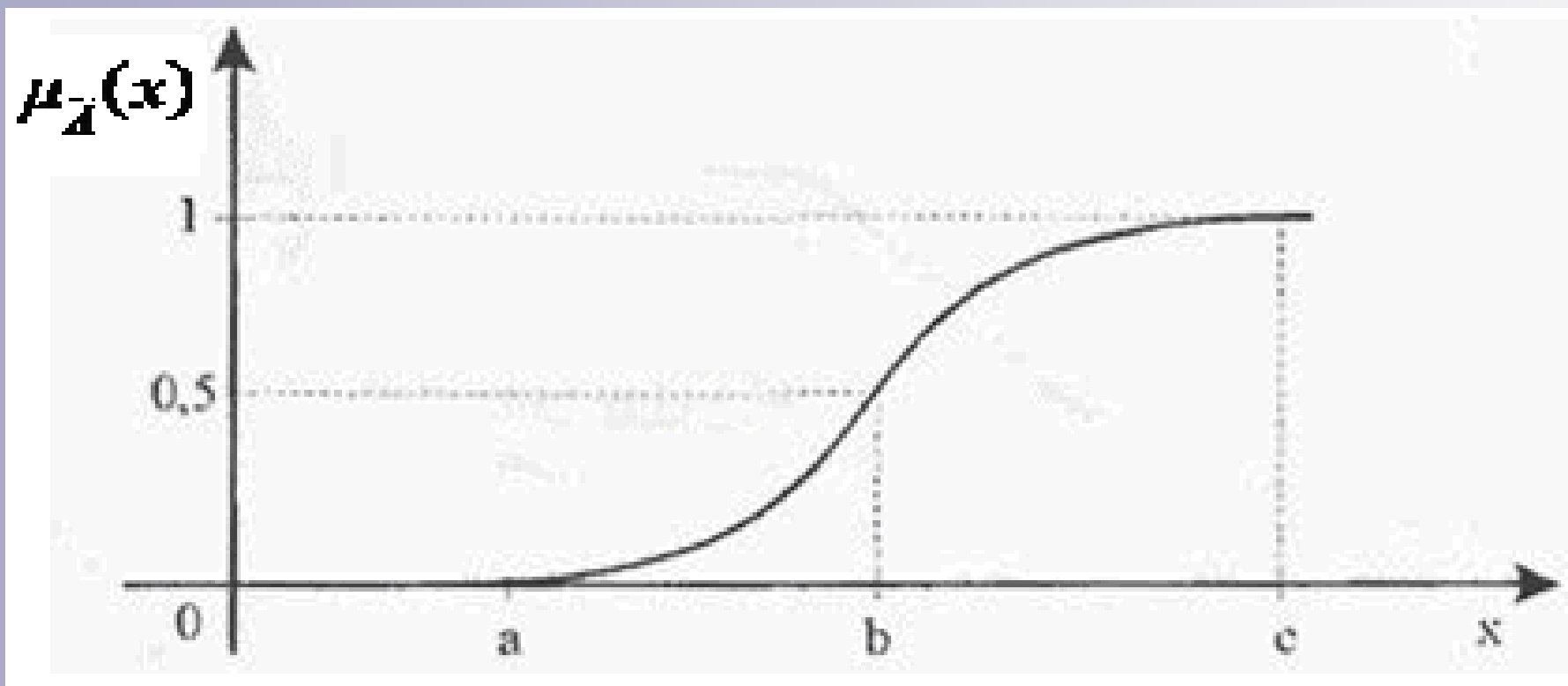




Некоторые виды функций принадлежности

- **Функции принадлежности класса S**
определяется как

$$S(x, a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq a, \\ 2 \cdot \left(\frac{x - a}{c - a} \right)^2 & \text{для } a \leq x \leq b, \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x - c}{c - a} \right)^2 & \text{для } b \leq x \leq c, \\ 1 & \text{для } x \geq c \end{cases} \quad \text{где } b = \frac{a + c}{2}$$

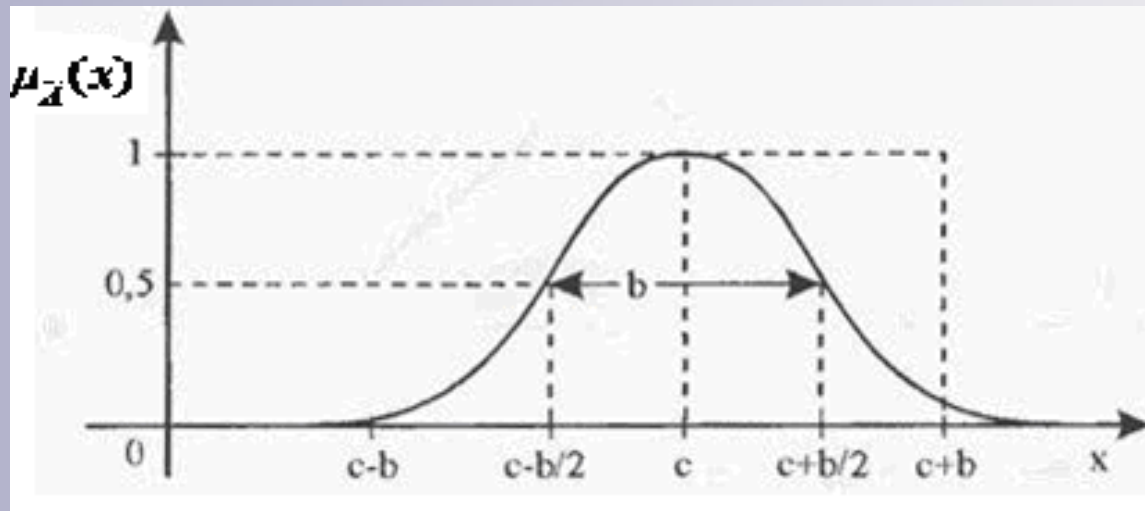




Функция принадлежности класса π .

Определяется через функцию S принадлежности класса следующим образом:

$$\pi(x, b, c) = \begin{cases} s(x, c-b, c-b/2, c) & \text{для } x \leq c, \\ 1-s(x, c, c+b/2, c+b) & \text{для } x \geq c \end{cases}$$

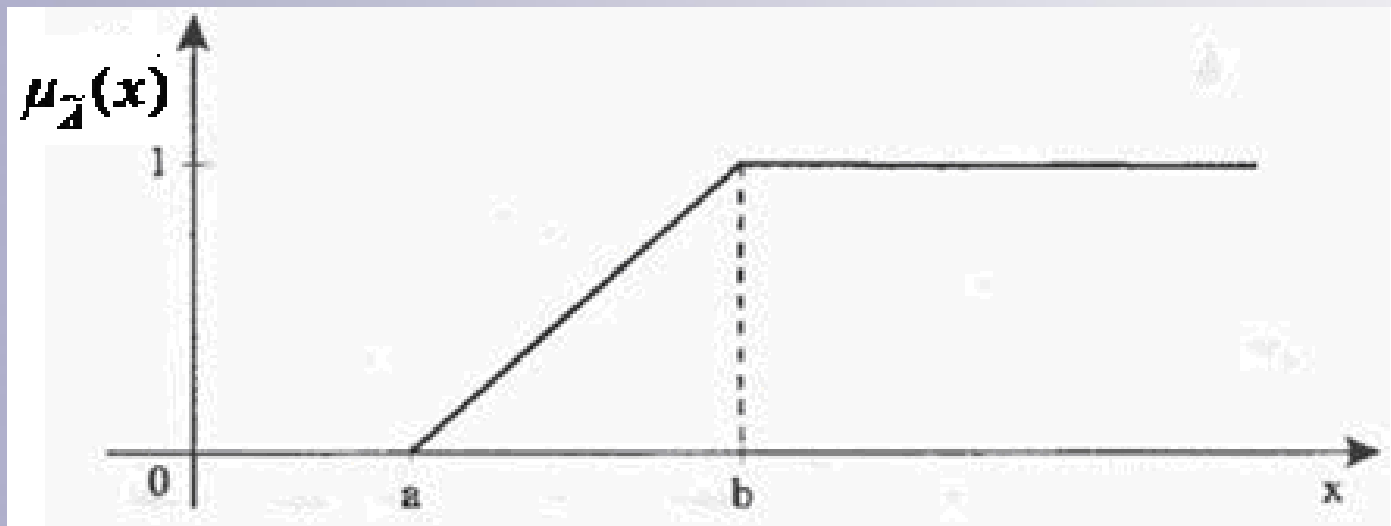




Функция принадлежности класса γ

определяется выражением:

$$\gamma(x, a, b) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq a, \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{для } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{для } x \geq b \end{cases}$$

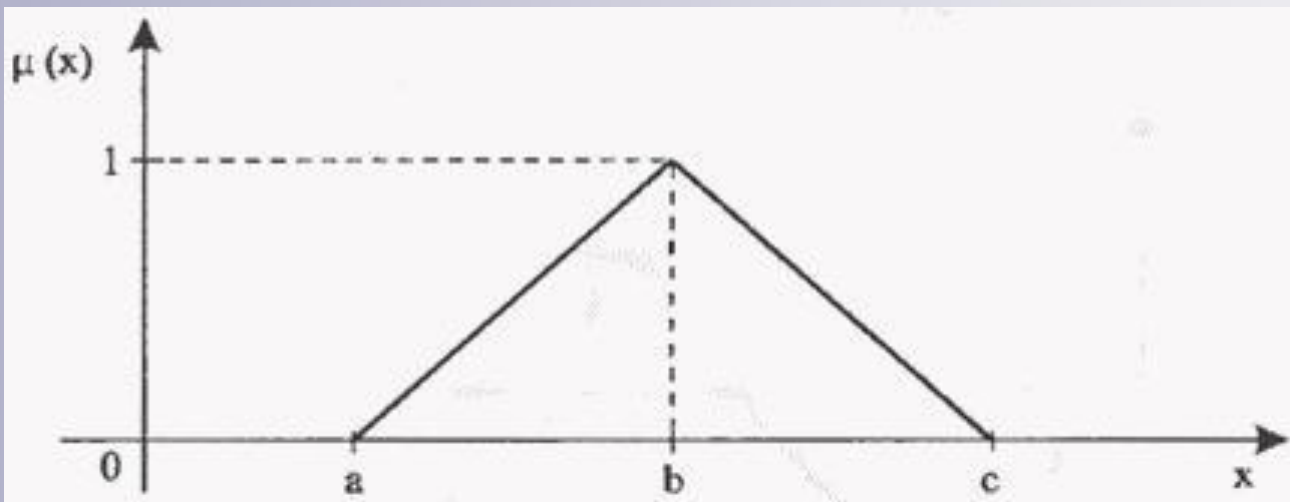




Функция принадлежности класса t

определяется выражением:

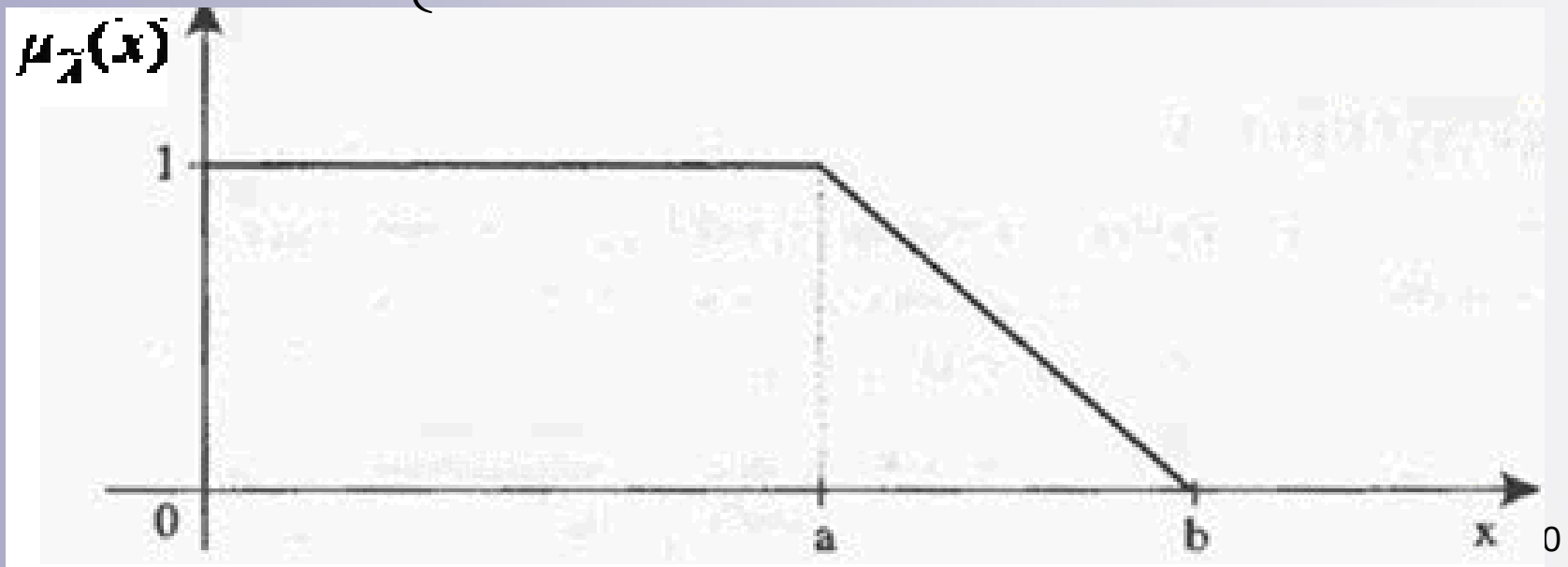
$$t(x, a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq a, \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{для } a \leq x \leq b, \\ \frac{c - x}{c - b} & \text{для } b \leq x \leq c, \\ 0 & \text{для } x \geq c \end{cases}$$





Функция принадлежности класса L
определяется выражением:

$$L(x, a, b) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \leq a, \\ \frac{b - x}{b - a} & \text{для } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{для } x \geq b \end{cases}$$

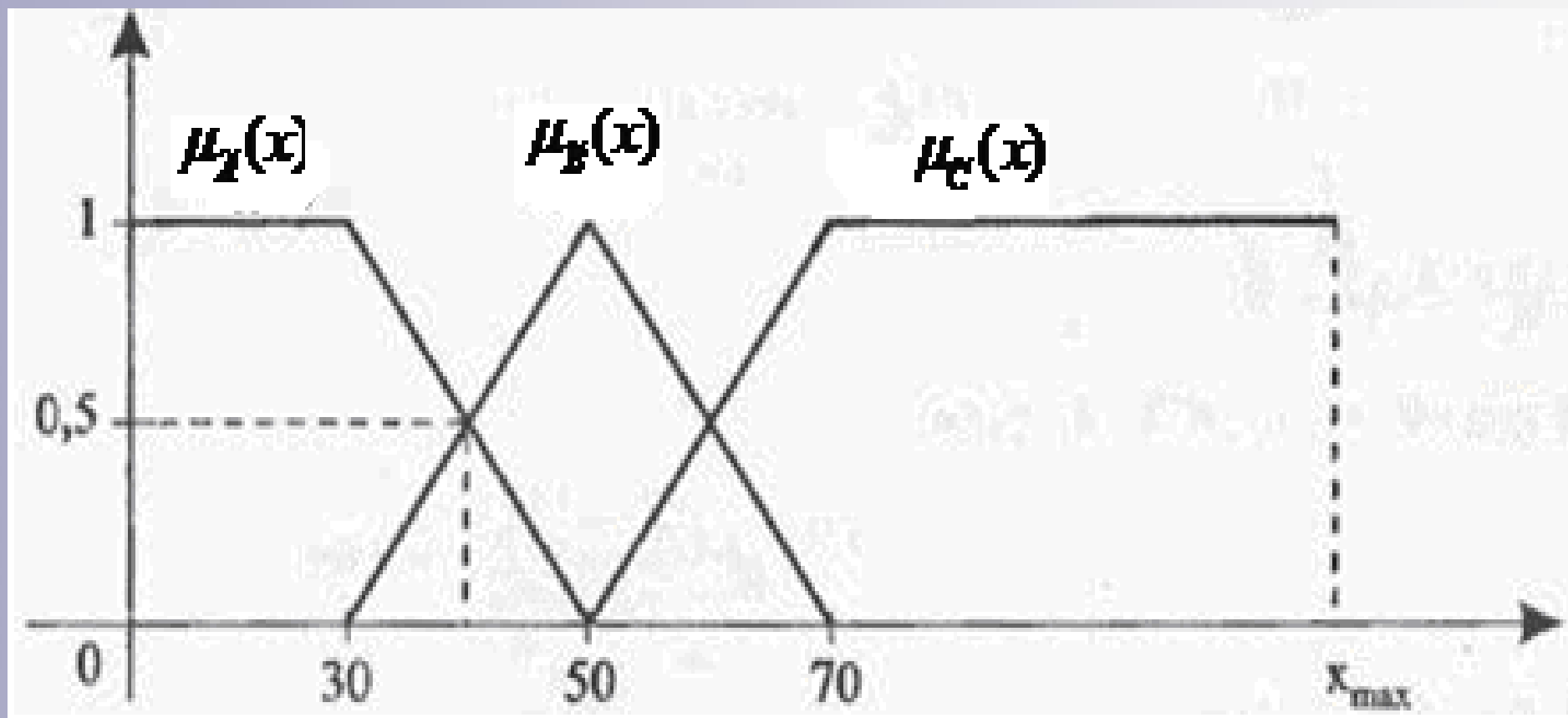




Пример.

Рассмотрим описание нечеткого множества, определяемого величинами «малой», «средней» и «высокой» скоростью движения автомобиля в городе, лежащими в диапазоне $[0, x_{max}]$, где x_{max} - максимальная скорость автомобиля.

Условно примем, что множество определяет диапазон «малых» скоростей, например $[0-50]$ км./час., множество - диапазон «средних» скоростей $[30-70]$ км./час. и множество - диапазон «высоких» скоростей $[70-x_{max}]$ км./час.



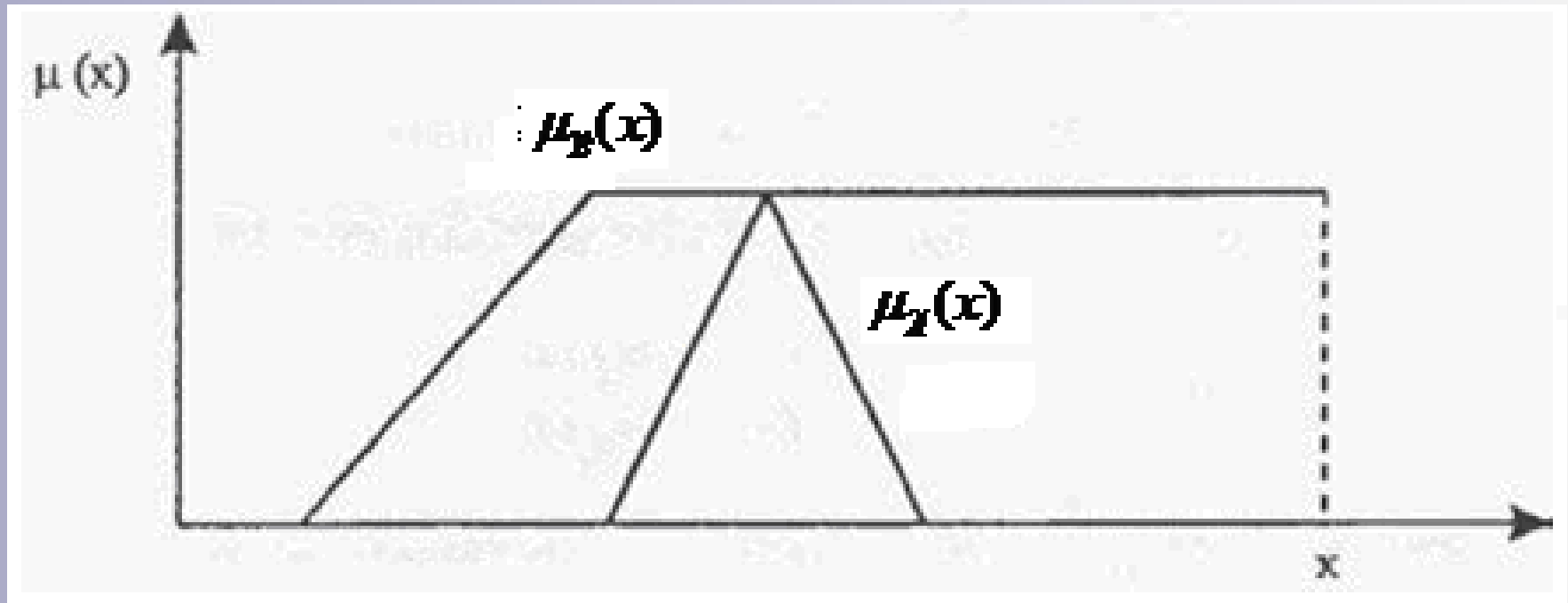


Операции над нечеткими множествами

- **Определение.** Нечеткое множество называется пустым и обозначается $\tilde{A} = \emptyset$ тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$.
- **Определение.** Нечеткое множество $\tilde{A}$ в X является *подмножеством* нечеткого множества $\tilde{B}$ в X ($\tilde{A}$ принадлежит $\tilde{B}$, т.е. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$), если для всех $x \in X$ $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$.

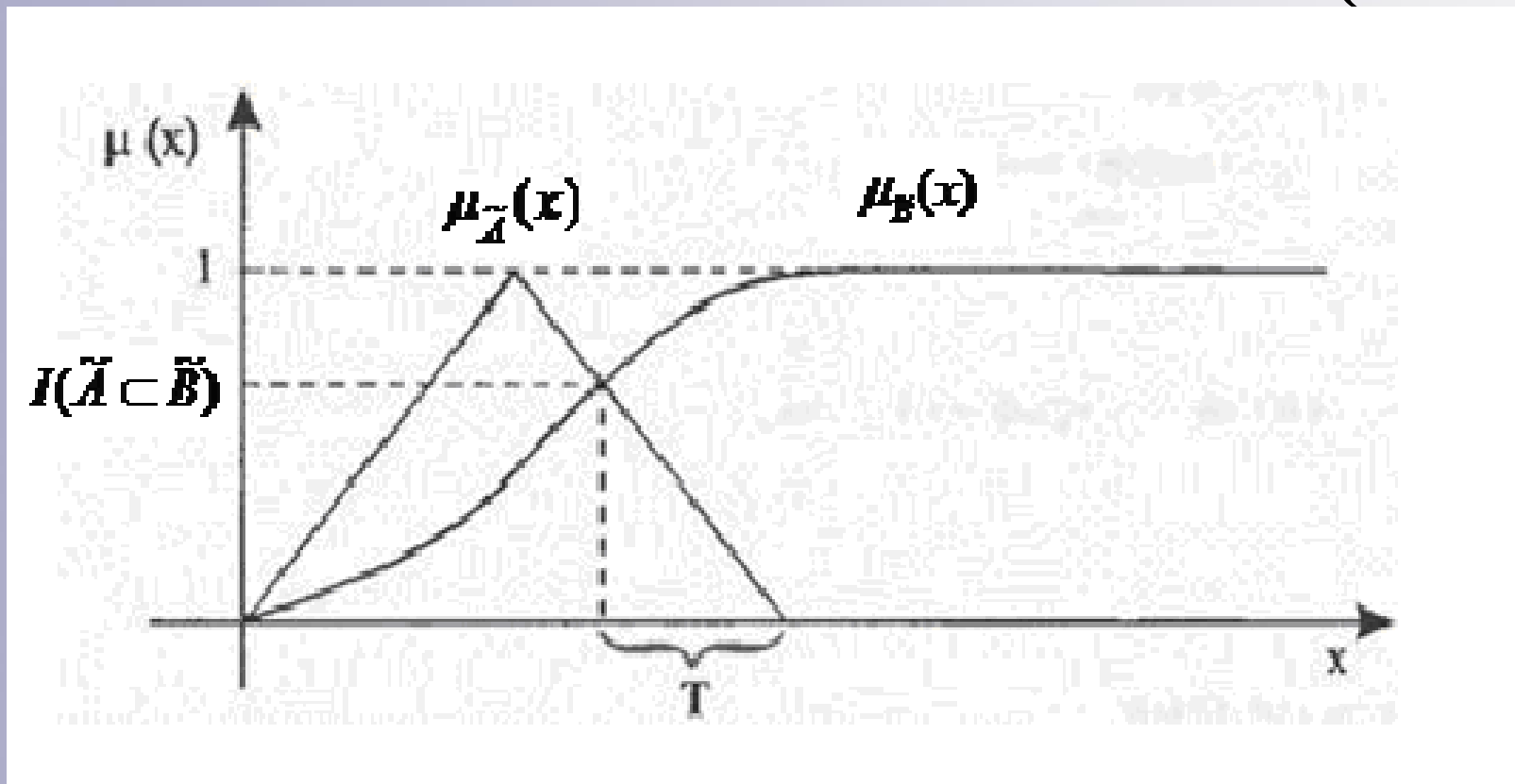


Пример включения нечеткого множества $\tilde{A}$ в нечеткое множество $\tilde{B}$





Пример включения нечеткого множества $\tilde{A}$ в нечеткое множество $\tilde{B}$ степени $I(\tilde{A} \subset \tilde{B})$



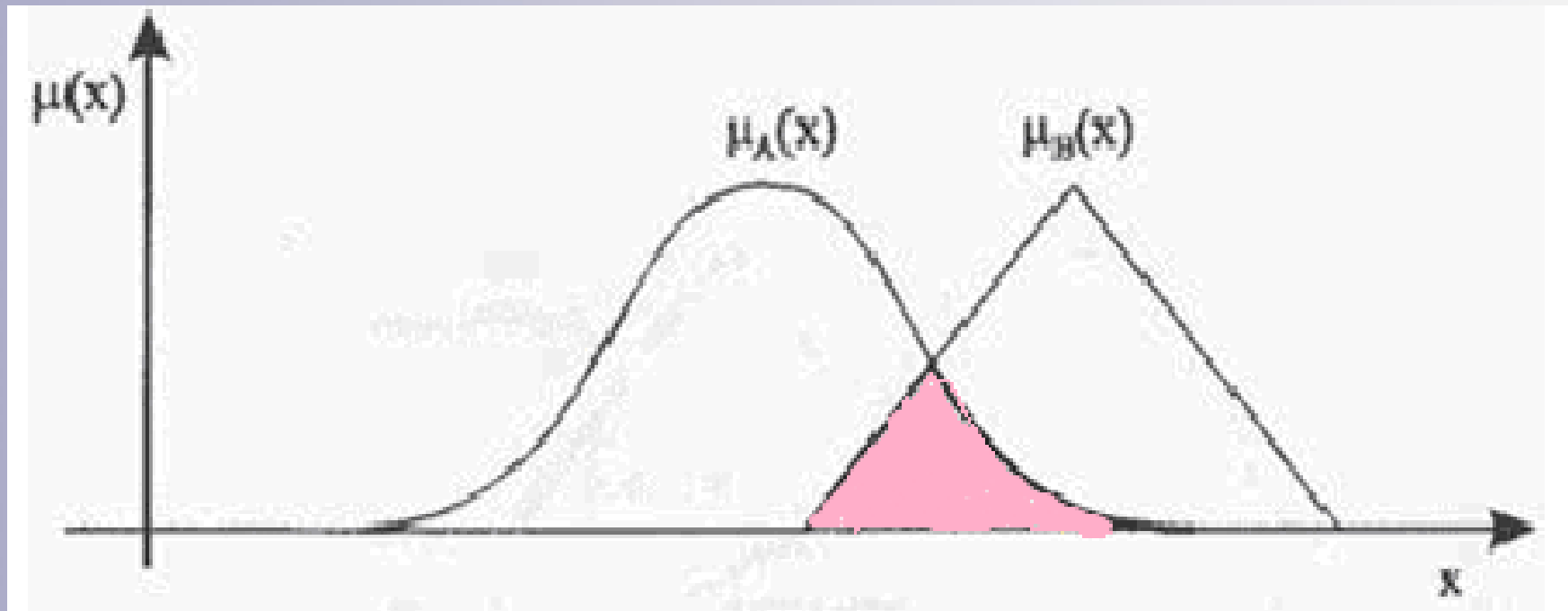
Здесь $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ Однако нечеткое множество
содержится в нечетком множестве в степени
$$I(\tilde{A} \subset \tilde{B}) = \min_{x \in T} \{\mu_{\tilde{B}}(x)\}, \quad T = \{x \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x); \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$



Определение. Пересечением нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое множество, определяемое функцией принадлежности для

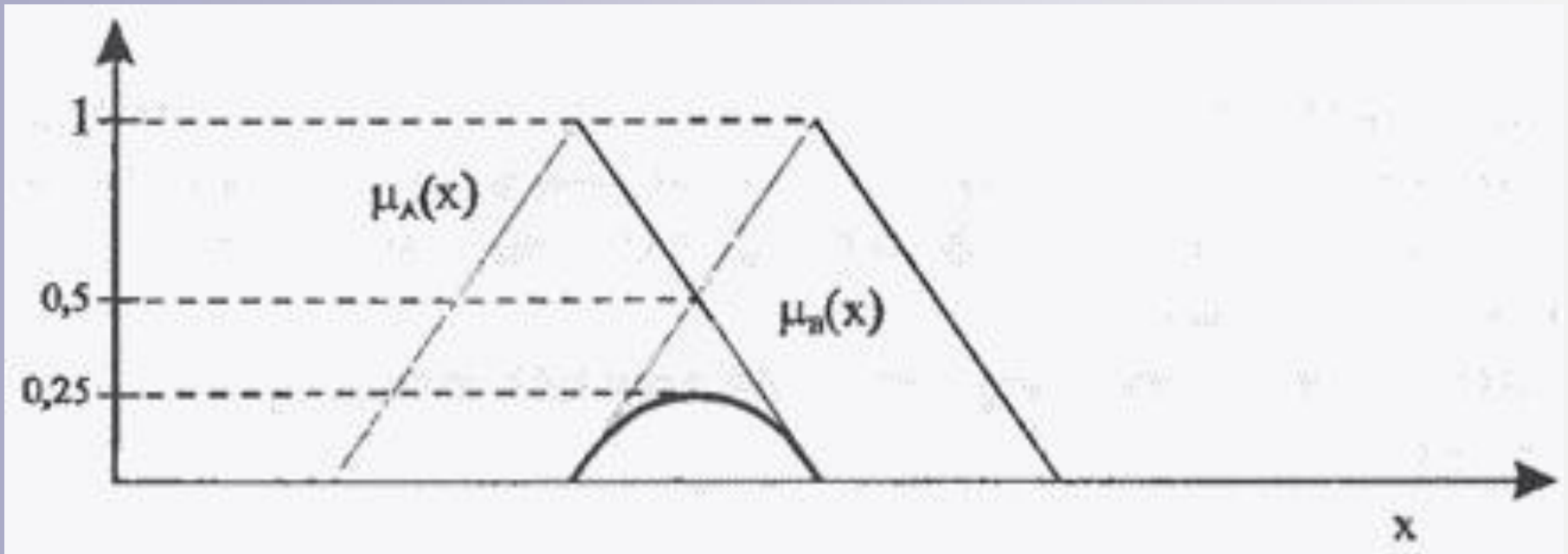
$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x); \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

$\forall x \in X$



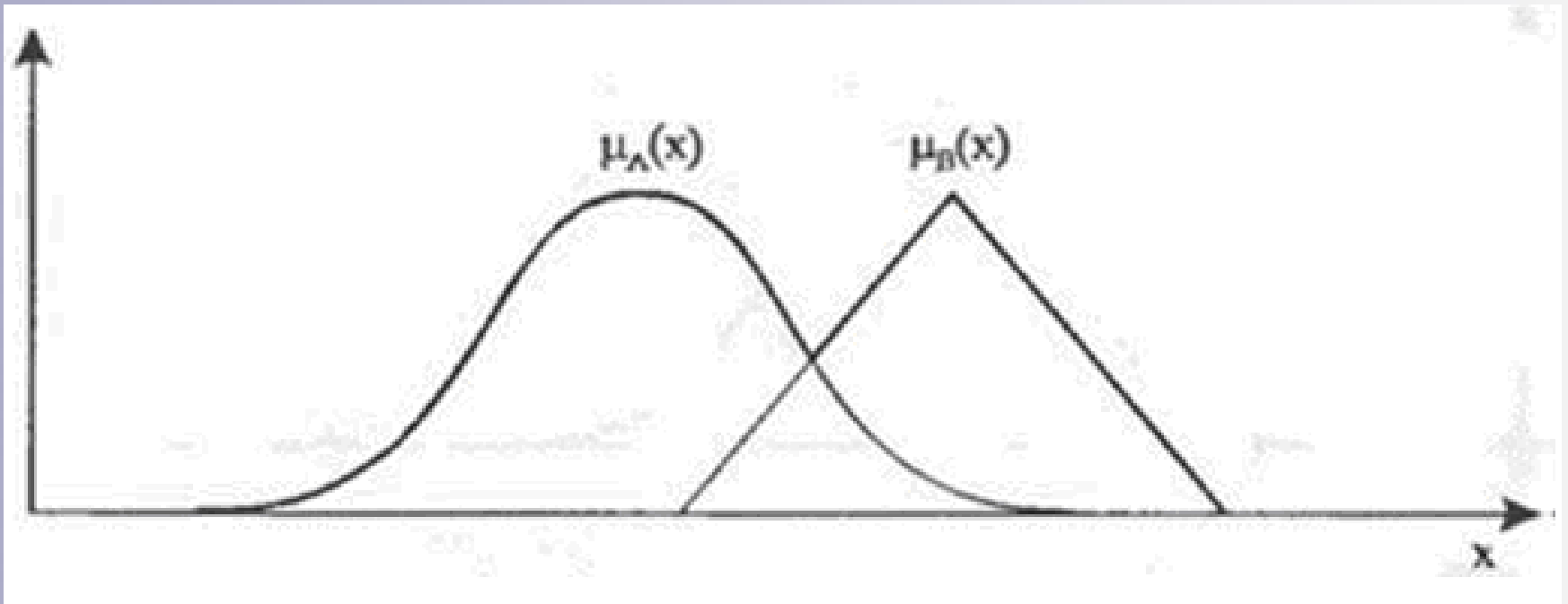


Графическое представление функции принадлежности $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$ для нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.





Определение. Объединением нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое множество, определяемое функцией принадлежности для $\forall x \in X$.

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x); \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$




Определение. Алгебраической суммой нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое множество $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

для $\forall x \in X$.



Пример.

- Пусть имеем $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и

$$\tilde{A} = \frac{0.9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.4}{6}$$

$$\tilde{B} = \frac{0.7}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6}$$

Тогда, в соответствии с определением,
получаем:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \frac{0.7}{3} + \frac{0.4}{6}$$

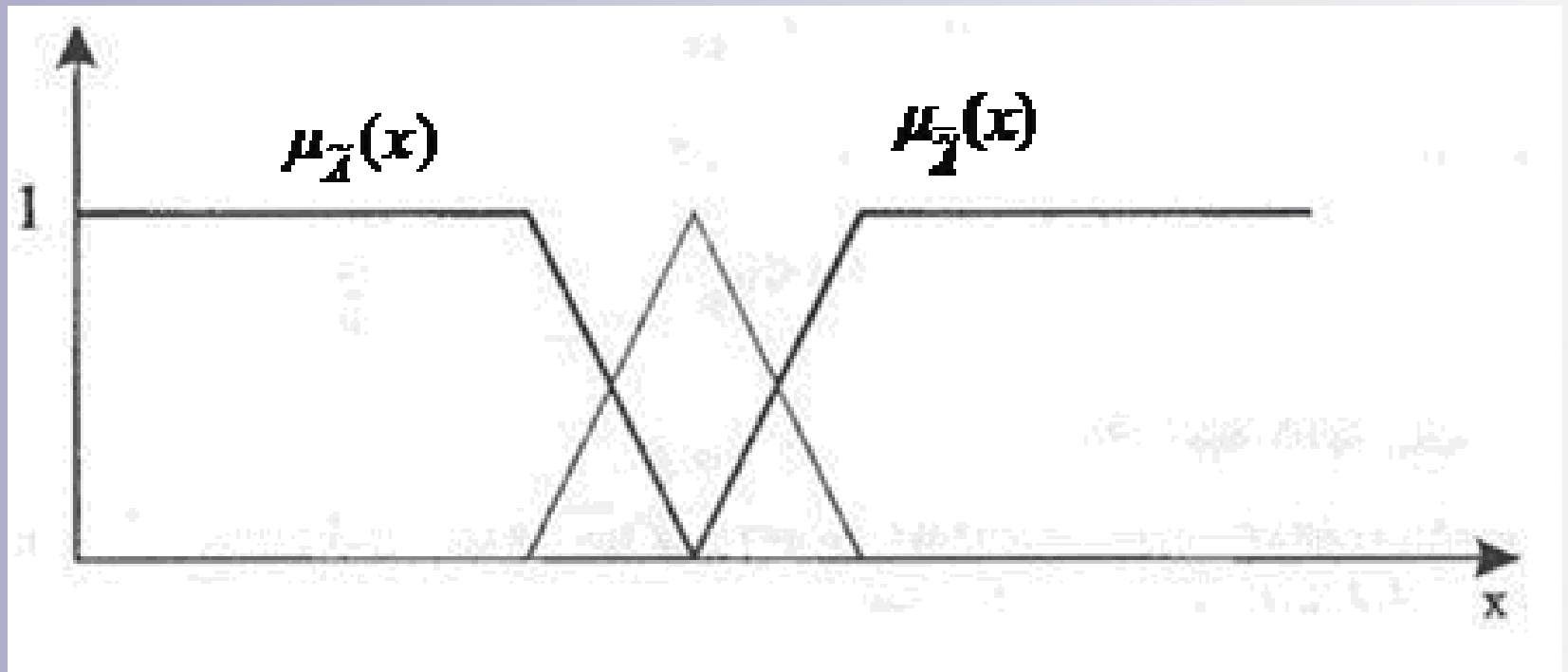
$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \frac{0.63}{3} + \frac{0.24}{6}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \frac{0.9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6}$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \frac{0.97}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.76}{6}$$



Определение. Дополнением нечеткого множества $\tilde{A} \subseteq X$ называется нечеткое множество $\tilde{A}^c$, которое определяется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ для $\forall x \in X$.





Пример.

Дано: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\tilde{A} = \frac{0.3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.9}{6};$

Тогда $\bar{\tilde{A}} = \frac{1}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.1}{6}$

Заметим, что $\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} = \frac{0.3}{2} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.1}{6} \neq \emptyset$ и

$$\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} = \frac{1}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.9}{6} \neq X$$



Пример.

Найти пересечение нечеткого множества $\tilde{A}$ чисел, много больших нуля и его дополнения $\bar{\tilde{A}}$.

Пусть функция принадлежности множества равна

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{для } x \geq 100; \\ 0, & \text{для } x \leq 0; \\ 0.5 - 0.5 \cos(\pi x / 100), & \text{для } 0 < x < 100 \end{cases}$$

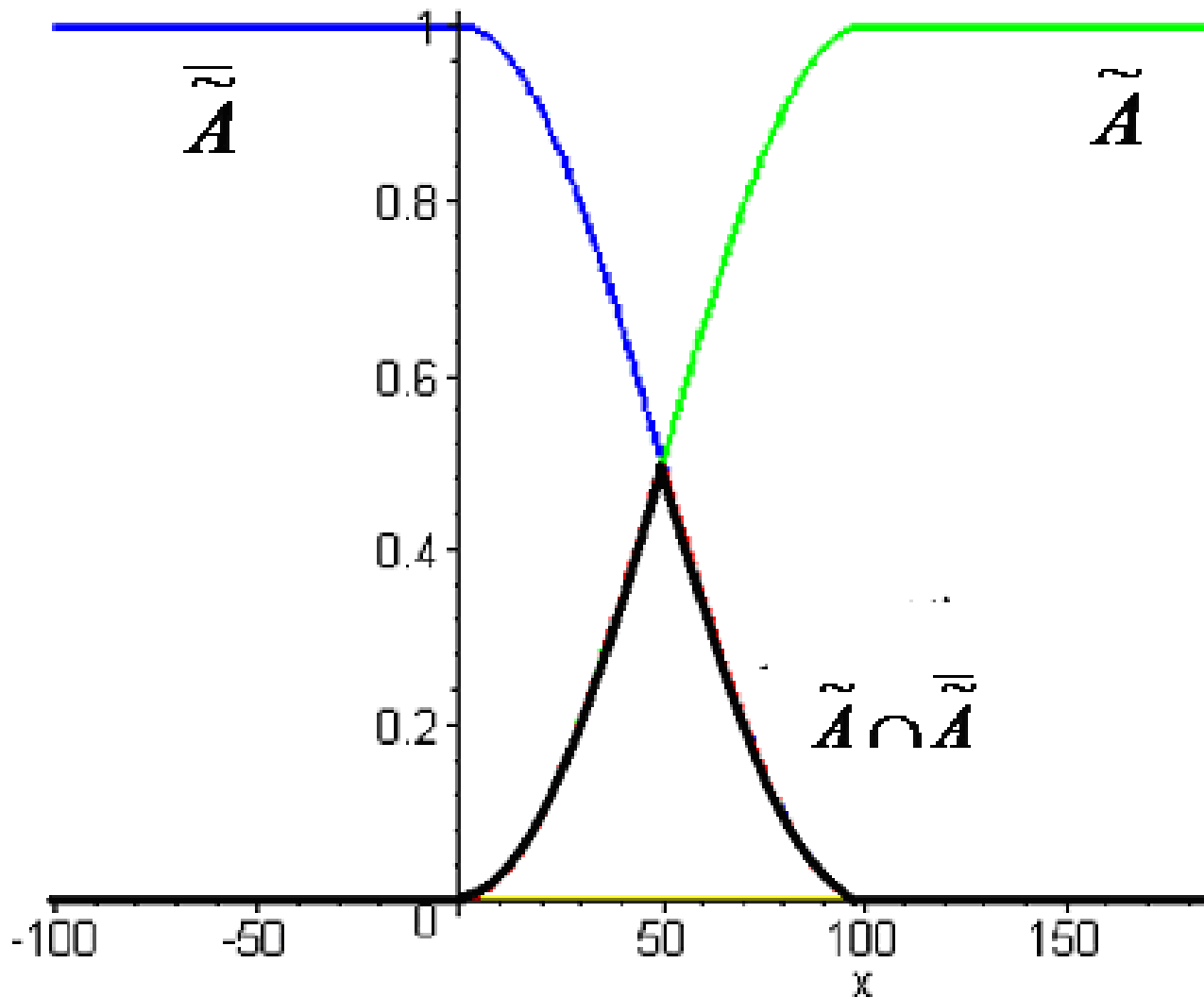


тогда дополнение нечеткого множества
имеет функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \geq 100; \\ 1, & \text{для } x \leq 0; \\ 0.5 + 0.5 \cos(\pi x / 100), & \text{для } 0 < x < 100 \end{cases}$$



Графически это будет выглядеть так





Следует отметить, что в случае нечетких множеств не выполняется условие дополненности, т.е.

$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} \neq \emptyset ; \tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} \neq X .$$

- Следует также помнить, что функция принадлежности пересечения нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\bar{\tilde{A}}$ отвечает неравенству:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}}} = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)\} \leq \frac{1}{2}$$

- Аналогично в случае объединения этих множеств получаем:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}}} = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)\} \geq \frac{1}{2}$$



Определение. Декартово произведение $\tilde{A} \times \tilde{B}$ нечетких множеств $\tilde{A} \subseteq X$ и $\tilde{B} \subseteq Y$ есть множество, которое определяется следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A} \times \tilde{B}}(x, y) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

для всех $x \in X$ и $y \in Y$.

Встречается и такое определение:

$$\mu_{\tilde{A} \times \tilde{B}}(x, y) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(y)\}$$



- Аналогично определяется декартово произведение и нечетких множеств $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$, которое можно записать следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x_1, x_2 \dots x_n) = \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\}$$

- Также встречается и такая запись функции принадлежности декартова произведения нечетких множеств в виде: $\mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x_1, x_2 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)$



Пример.

- Пусть $X = \{a, b\}$; $Y = \{2, 4, 6\}$; $\tilde{A} = \left\{ \frac{0.5}{a} + \frac{0.8}{6} \right\}$;
 $\tilde{B} = \left\{ \frac{0.4}{2} + \frac{0.7}{4} + \frac{0.2}{6} \right\}$.

Тогда,

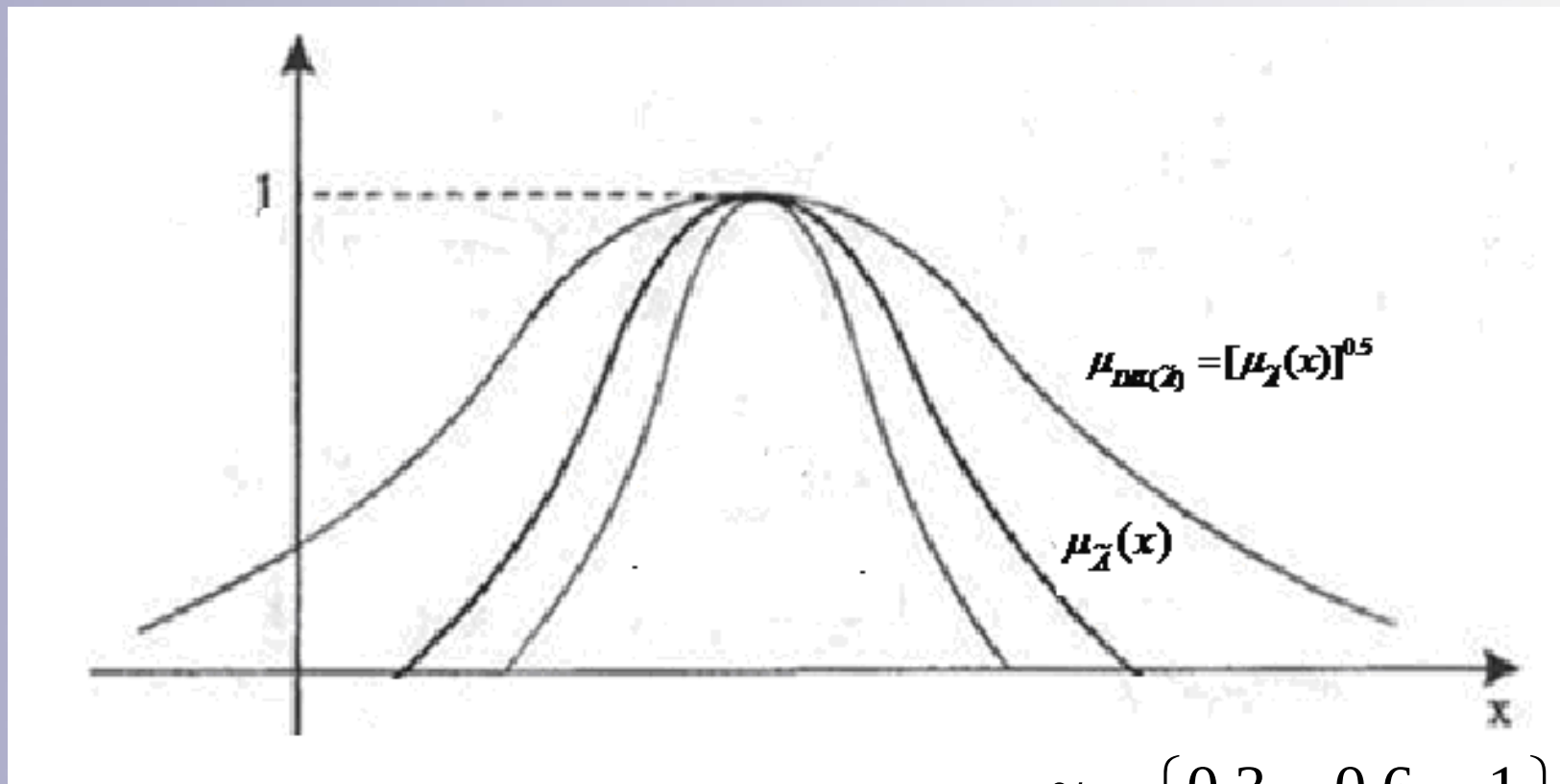
$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \left\{ \frac{0.4}{(a,2)} + \frac{0.5}{(a,4)} + \frac{0.2}{(a,6)} + \frac{0.4}{(b,2)} + \frac{0.7}{(b,4)} + \frac{0.2}{(b,6)} \right\}$$



- **Определение.** Концентрация нечеткого множества $\tilde{A} \subseteq X$ (обозначается $CON(\tilde{A})$) определяется как: $\mu_{CON(\tilde{A})} = [\mu_{\tilde{A}}(x)]^2$ для каждого $x \in X$.
- **Определение.** Разбавлением нечеткого множества $\tilde{A} \subseteq X$ (обозначается $DIL(\tilde{A})$) определяется как: $\mu_{DIL(\tilde{A})} = [\mu_{\tilde{A}}(x)]^{0.5}$ для каждого $x \in X$.



Графическая интерпретация операции концентрации и разбавления



- **Пример.** Пусть $X = \{a, b, c, d\}$; $\tilde{A} = \left\{ \frac{0.3}{a} + \frac{0.6}{b} + \frac{1}{d} \right\}$

Тогда $CON(\tilde{A}) = \left\{ \frac{0.09}{a} + \frac{0.36}{b} + \frac{1}{d} \right\}$; $DIL(\tilde{A}) = \left\{ \frac{0.548}{a} + \frac{0.775}{b} + \frac{1}{d} \right\}$